



# MODELOS ESTADÍSTICOS PARA LA DETERMINACIÓN DE RESPUESTAS MECÁNICAS CRÍTICAS EN PAVIMENTOS RÍGIDOS

**Ricardo Quirós Orozco**

**Ing. Luis Guillermo Loría Salazar, Ph.D.**

**Ing. Paulina Leiva Padilla**

*Unidad de Materiales y Pavimentos-PITRA*

## INTRODUCCIÓN

Las nuevas tendencias en el diseño de pavimentos a nivel mundial se centran en metodologías de análisis y diseño empírico mecanicista.

Estas metodologías utilizan modelos de deterioro, que se basan primordialmente en las respuestas mecánicas de la estructura, ante las condiciones climáticas presentes y la carga de tránsito.

El diseño adecuado de un pavimento utilizando estas metodologías requiere la verificación del desempeño de la estructura a lo largo de su vida, mediante el cálculo de las respuestas mecánicas del pavimento y la capacidad de los materiales que lo constituyen.

El enfoque tradicional de ecuaciones de solución cerrada, simples de usar, pero desarrolladas bajo supuestos teóricos rígidos, conocimiento mecánico limitado y simplificaciones bruscas de las condiciones reales de los materiales y su comportamiento, las hace poco prácticas para los fines establecidos.

Adicionalmente, el enfoque del uso de algoritmos computacionales de elemento finito requiere entrenamiento de los usuarios, software, equipo computacional especializado de alto costo económico y finalmente una inversión en tiempo de cálculo extenso.

Considerando estos aspectos y para garantizar la viabilidad de una propuesta de diseño empírico mecanicista, se hace

necesario el desarrollo de modelos simples, rápidos y precisos para la predicción de las respuestas mecánicas críticas, como es el caso de modelos basados en técnicas de regresión lineal múltiple o de redes neurales artificiales, a partir de una base de datos completa y representativa de los rangos de las condiciones más utilizadas, tienen la capacidad de resolver el problema, manteniendo las ventajas de las soluciones cerradas y del elemento finito.

## METODOLOGÍA

Para el desarrollo de la presente investigación, se generó una base de datos, a partir de las respuestas críticas: esfuerzos, deformaciones y deflexiones, de 19 683 estructuras típicas de pavimentos rígidos, generadas mediante simulación matemática, por medio de la metodología del elemento finito, a través del software ISLAB2000.

Para la definición de las estructuras típicas, se definieron ocho parámetros variables: espaciamiento de juntas, módulo elástico de la losa, espesor de la losa, gradiente térmico, coeficiente de reacción de la subrasante, módulo elástico de la base, diámetro de la dovela y eficiencia de transferencia de carga; tal como se muestra en el Cuadro 1.

La definición de las respuestas críticas está basada en los deterioros incluidos en la Guía de diseño Empírico-Mecanicista de Pavimentos (MEPDG) de la Asociación de Carreteras y Transportes de Estados Unidos (AASHTO, por sus siglas en



**Cuadro 1. Variables**

Variable	S.I.	Inglés
Espaciamento de juntas (m) (ft)	3.7	12
	4.6	15
	5.2	17
Módulo elástico losa (GPa) (ft)	27.6	4000
	34.5	5000
	41.2	6000
Espesor de losa (cm) (in)	15.2	6
	33.0	13
	43.2	17
Gradiente de temperatura (°C) (°F)	-10	-18
	-2.3	-4
	6.6	12
Coeficiente reacción subrasante (MPa/m) (pci)	27.1	100
	54.3	200
	81.4	300
Módulo elástico base (GPa) (ksi)	0.34	50
	1.90	250
	3.45	500
Diámetro dovelas (cm) (in)	0	0
	2.5	1
	3.8	1.5
Eficiencia de transferencia de carga (%)	10	
	50	
	80	

inglés): agrietamiento transversal desde la superficie de la losa hacia la base de esta, agrietamiento transversal desde la base de la losa hasta la superficie, falla de las juntas transversales e índice de regularidad internacional (IRI).

De acuerdo con estos modelos, se necesitan tres respuestas mecánicas: el esfuerzo longitudinal de tensión del punto medio de la losa en su base, el esfuerzo longitudinal de tensión del punto medio de la superficie de la losa y las deflexiones diferenciales de dos losas contiguas (Figura 1).

Cada una de estas respuestas mecánicas implica una posición específica de los ejes del vehículo de diseño. Para este caso, se utilizó el camión T3-S2, tomando en cuenta los pesos máximos permitidos en el “Reglamento de circulación por carretera con base en el peso y las dimensiones de los vehículos de carga” Decreto Ejecutivo 31363-MOPT (2003) para este vehículo.

Finalmente, a partir de las bases de datos generadas, se realizó la calibración de modelos estadísticos que correlacionan las

características de cada estructura con las respuestas mecánicas obtenidas.

La generación de estos modelos mecánicos de respuesta, se realizó por medio de dos metodologías: modelos de regresión lineal múltiple y modelos basados en la metodología de redes neurales artificiales. El proyecto originó cuatro modelos de predicción para cada una de las respuestas mecánicas anteriormente establecidas, dos por metodología de análisis y dos por sistema de unidades.

Con el fin de facilitar el uso de los modelos, en especial los modelos basados en redes neurales artificiales, se desarrolló una interfaz de usuario para cálculo: el ApRIGID, que será lanzado próximamente en el centro de descarga del LanammeUCR.

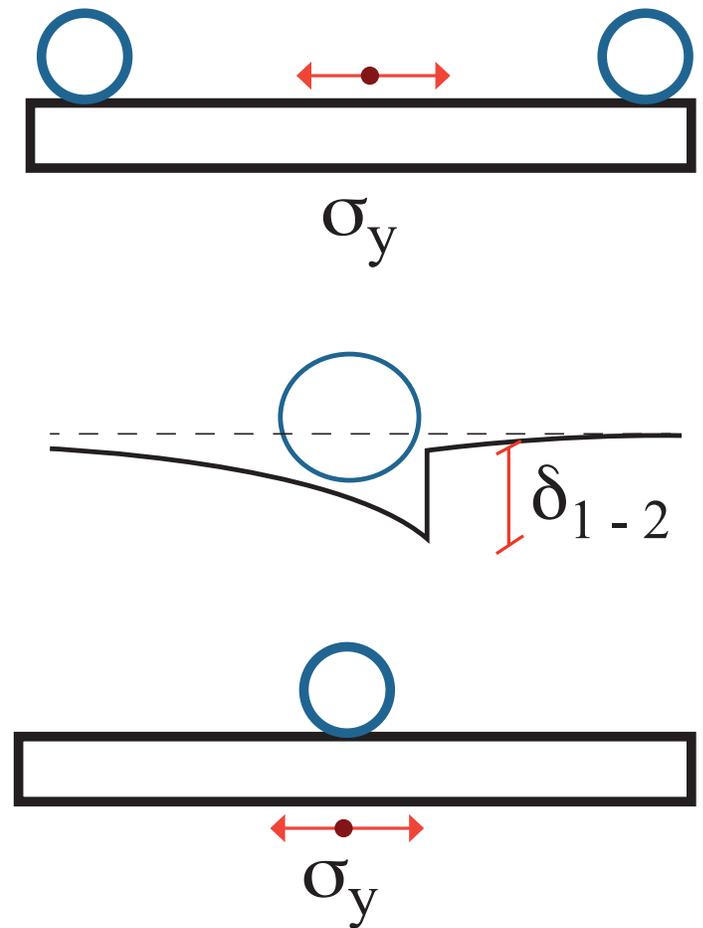


Figura 1. Ubicación de las respuestas mecánicas

# RESULTADOS

## Modelos estadísticos

Para la generación de los modelos de regresión lineal múltiple, siguiendo la técnica de regresión por pasos se definieron los mejores predictores. Posteriormente, se determinaron subconjuntos de variables para definir las mejores regresiones para un número manejable de parámetros.

El primer modelo, que predice los esfuerzos a tensión en la superficie de losa, se presenta en la Ecuación 1:

$$\begin{aligned} \sigma_{(t,s)} = & -281.12 + 102.9 * L - 63.64 * \Delta t \\ & - 63.64 * \Delta t - 3.0 * LTE - \frac{(5.083 * E * L * \Delta t)}{l} \\ & + \frac{1}{h^2} * (-60509.9 * L + 52245.4 * l \\ & - \frac{(116.37 * E * l * \Delta t)}{L} + \frac{(24.061 * l * \Delta t)}{L}) \end{aligned}$$

$$R^2 = 0.987$$

El segundo modelo (Ecuación 2) permite el cálculo de esfuerzos críticos a tensión en la base de la losa.

$$\begin{aligned} \sigma_{(t,b)} = & 206.453 + 50.207 * \Delta t - 2.328 * LTE \\ & + \frac{4.319 * LE \Delta t}{l} - \frac{17.797 * l * \Delta t}{L} \\ & + \frac{l}{h^2} (244.942 * \Delta t E - 28890.483 * E_b) \\ & + \frac{l}{h^2} (-9306.278 * L + 58364.478 * l) \end{aligned}$$

$$R^2 = 0.987$$

Los modelos relacionados a deflexiones fueron divididos según el mecanismo de transferencia de carga existente en el pavimento, el primero, para estructuras sin dovelas se muestra en la Ecuación 3.

$$\begin{aligned} \delta_{1,2} = & -0.0566 - \frac{(1.3327 * L)}{1000} - \frac{(548.34 * E)}{10^6} \\ & - \frac{(1.4528 * h)}{1000} - \frac{(0.3125 * LTE)}{1000} + \frac{(9.3819 * l)}{1000} \\ & + \frac{1}{k * l} \left( \frac{552.14 * k}{1000} - \frac{2872.12}{l^2} \right) \\ & + \frac{540.849}{\sqrt{(E * h^3 * k)}} \end{aligned}$$

$$R^2 = 0.974$$

Para el caso de estructuras con dovelas el modelo determinado es el de la Ecuación 4.

$$\begin{aligned} \delta_{1,2} = & 0.015 * 10^{-3} - \frac{37.56 * L}{10^6} - \frac{13.914 * k}{10^6} \\ & - \frac{2.494 * \phi}{1000} - \frac{48.118 * LTE}{10^6} + \frac{114.022 * l}{10^6} \\ & + \frac{(8.123 * l)}{1 * 1000} + \frac{(7.76 * \phi * LTE)}{10^6} + \frac{(23.53 * l^4)}{E * h^3 * 1000} \end{aligned}$$

$$R^2 = 0.969$$

Para todos los casos anteriores, se detallan las variables:

- $\Delta t$ = Diferencial térmico entre la superficie y base de la losa (°C),
- $E$ = Módulo elástico del concreto (GPa),
- $L$ = Espaciamiento entre juntas (m),
- $LTE$ = Eficiencia de transferencia de carga en juntas longitudinales (%),

- $E_b$ = Módulo elástico de la base (GPa),
- $h$ = Espesor de losa (cm),
- $k$ = Modulo de reacción de la subrasante (MPa/m),
- $\phi$ = Diámetro de la dovela (cm) y,

$$l = \left( \frac{E * h^3}{k} \right)^{0.25}$$

Durante el proceso de validación estadística de los coeficientes, tendencias de residuos y cumplimiento de hipótesis de regresión, se observó que los modelos de esfuerzos (Modelo 1 y 2) presentaban inconvenientes con la determinación de respuestas mecánicas menores a los 30 psi y valores en compresión. Debido a que estos valores son insignificantes en un análisis de desempeño, como se muestra en el Cuadro 2, se tomó la decisión de excluirlos del análisis.

**Cuadro 2. Errores promedio de los modelos de regresión línea múltiple**

MODELO	RLM	
	TODOS	Mayores a 30 Psi
Modelo 1	127.82%	7.00%
Modelo 2	89.91%	8.72%
Modelo 3a	6.76%	
Modelo 3b	3.12%	

**Cuadro 3. Errores promedio de los modelos de red neural artificial**

MODELO	ANN	
	TODOS	Mayores a 30 Psi
Modelo 1	53.56%	3.99%
Modelo 2	52.42%	5.24%
Modelo 3a	8.30%	
Modelo 3b	2.56%	

De manera paralela al desarrollo de los modelos de regresión lineal múltiple se calibró mediante el algoritmo de propagación hacia atrás del error una serie de redes neurales artificiales como solución alternativa al mismo problema.

La calibración se realizó en el software Multiplebackpropagation, iniciativa de código abierto distribuido bajo la licencia GPLv3. Se definió un número máximo de un millón de iteraciones para la calibración con los datos de entrenamiento con una topología de ocho capas de entrada, 15 capas ocultas y una capa de salida.

Los modelos calibrados mostraron un comportamiento excepcional, en comparación con los modelos de regresión lineal múltiple, reduciendo los errores básicamente a la mitad tal y como se observa en el Cuadro 3.

## ApRIGID 1.0

Finalmente, para facilitar el uso de los modelos calibrados en el

proyecto, se desarrolló la aplicación informática ApRIGID en su versión 1.0 (Figura 2).

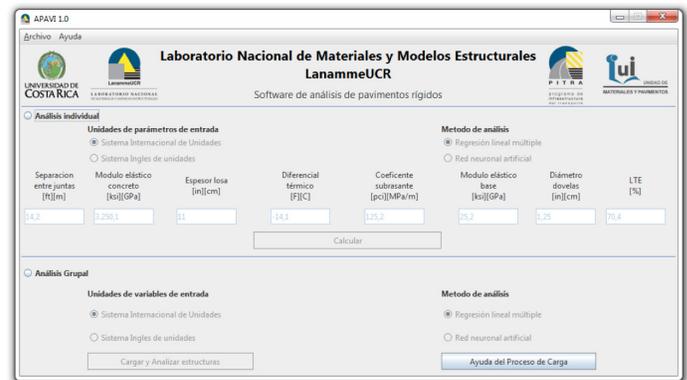


Figura 2. ApRigid

El ApRigid permite el cálculo de respuestas mecánicas críticas, utilizando las metodologías de regresión lineal múltiple y de redes neurales artificiales en los Sistemas de Unidades Internacional e Inglés.

El software permite el análisis de estructuras individuales, la incorporación de listas de trabajo y la exportación de resultados en formatos compatibles con MS Office.

## CONCLUSIONES

Los cuatro modelos de regresión lineal múltiple calibrados presentaron indicadores estadísticos satisfactorios de bondad de ajuste, con 97.4 % de la variabilidad de los datos en el peor de los casos, minimizando errores promedio hasta el 3.12 % y garantizando la inclusión de variables estadísticamente justificadas en su análisis.

Como solución alternativa, la calibración de modelos de red neural artificial mostró resultados satisfactorios, por medio de la comparación con las regresiones lineales calibradas, donde se observó una reducción sustancial de los errores promedios asociados.

Las limitaciones que muestran los modelos no afectan el desempeño de los mismos en procesos de diseño empírico mecanicistas, por lo que son aptos para ser incluidos en una eventual guía mecanicista de diseño de pavimentos rígidos local (CR-ME). El software APRIGID tiene, por lo tanto, las cualidades necesarias para ser incorporado al CR-ME como el motor de análisis estructural.

## REFERENCIAS

1. Birkan B., M. (2006). Backcalculation of Layer Moduli for Jointed Plain Concrete Pavement . Ames, Iowa : Midwest Transportation Consortium.
2. Ceylan, H., Tutumluer, E., & Barenberg, E. (1999). Modeling of Concrete Airfield Pavements Using Artificial Neural Networks. Urbana Champaign: University of Illinois at Urbana Champaign.
3. ERES Consultants; ARA Inc. (2003). NCHRP Project 1-37A Appendix QQ:Structural Response Models for Rigid Pavements. Champaign, Illinois: National Cooperative Highway Research Program.
4. Heinrichs, K. W., Liu, M. J., Darter, M. I., Carpenter, S. H., & Ioannides, A. M. (1988). Rigid Pavements Analysis and Design. Urbana-Champaign: University of Illinois at Urbana-Champaign .
5. Ministerio de Obras Públicas y Transportes. (23 de Setiembre de 2003). Reglamento de circulación por carretera con base en el peso y las dimensiones de los vehiculos de carga: Decreto Ejecutivo No. 31363-MOPT. Diario Oficial La Gaceta, pág. 5.